Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

Inhalt

1. Zahlenbereiche / Zahlenmengen

	Bezeichnung	Beschreibung / Beispiele
natürliche Zahlen	**N**	0,1,2,3,4,5,6,7,8,....
ganze Zahlen	**Z**	..., -2,-1, 0, 1, 2, 3, ...
rationale Zahlen	**Q**	Bruchzahlen, z.B. $\frac{1}{2}; -\frac{6}{7}; -0{,}3; 2; 0$
irrationale Zahlen		Zahlen, die sich **nicht** als Bruch schreiben lassen, z.B. π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$,...
reelle Zahlen	**R**	rationale Zahlen und irrationale Zahlen

2. Terme

Unter einem **Term** versteht man einen **mathematischen Ausdruck** der aus Zahlen und / oder Variablen besteht, welche z.T. mit Rechenzeichen verbunden sind.

Beispiele: 3 , x, 6a , 3+4 , x^2 , (2x+5) – 1

2.1. Grundbegriffe

Summe **Differenz**	$a+b$ $a-b$	**a** und **b** heißen **Summanden**
Produkt	$a \cdot b$	**a** und **b** heißen **Faktoren**
Quotient	$a:b; b \neq 0$	**a** heißt **Dividend**, **b** heißt **Divisor** (b darf nicht Null sein)
Bruch	$\frac{a}{b}; b \neq 0$	**a** heißt **Zähler**, **b** heißt **Nenner** (b darf nicht Null sein)
Kehrwert von a	$\frac{1}{a}; a \neq 0$	a darf nicht Null sein
Potenz	a^b	**a** heißt **Basis (Grundzahl)**, **b** heißt **Exponent (Hochzahl)**

Zu unterscheiden: $a+a+a+a=4a$ $\quad a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$

2.2. Summen und Differenzen

Summanden dürfen vertauscht werden

Gleichartige Glieder werden zusammengefasst

$$2a-5+3b+a-5b-a+3$$
$$=2a+a-a-5+3+3b-5b$$
$$=2a-2-2b$$

2.3. Produkte

Faktoren dürfen vertauscht werden. $2a \cdot 5b = 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 10ab$

Ungerade Anzahl von Minuszeichen
→ Produkt ist negativ

$2a \cdot (-3b) \cdot (-2) = 2 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot a \cdot b = 12ab$
$2a \cdot (-3b) \cdot 2 = 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a \cdot b = -12ab$

Malpunkte werden üblicherweise **weggelassen**, wenn sie zwischen

- einer Zahl und einer Variablen, z.B. $2a = 2 \cdot a$
- einer Zahl und einer Klammer , z.B. $2(a+1) = 2 \cdot (a+1)$
- einer Variablen und einer Klammer, z.B. $x(a+1) = x \cdot (a+1)$
- zwei Variablen $ax = a \cdot x$

stehen.

2.4. Auflösen von Klammern

$3a + (2b-3) = 3a + 2b - 3$ „**Plus**" vor der Klammer: Klammer einfach weglassen

$3a - (2b-3) = 3a - 2b + 3$ „**Minus**" vor der Klammer: In der Klammer wird aus Plus Minus und umgekehrt

$2(2b-3) = 2 \cdot 2b + 2 \cdot (-3) = 4b - 6$
$-3(2b-3) = -3 \cdot 2b - 3 \cdot (-3) = -6b + 9$

Jedes Glied der Summe wird mit dem Faktor vor der Klammer multipliziert
Minuszeichen beachten!

$$\begin{aligned} 2a - [3b + 2(a-2b)] &= 2a - [3b + 2a - 4b] \\ &= 2a - [-b + 2a] \\ &= 2a + b - 2a = b \end{aligned}$$

Mehrfachklammern: innere Klammern zuerst auflösen

2.5. Ausklammern und Ausmultiplizieren

2.5.1. Ausklammern

➔ **aus einer Summe wird ein Produkt**

$$\begin{aligned} 4x + 2x^2 &= 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot x \cdot x \\ &= 2x(2+x) \end{aligned}$$

1. Alle Summanden werden in Faktoren zerlegt
2. Ausgeklammert wird der größte gemeinsame Faktor (hier: $2x$ bzw. ax^2)

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 3ax^3 &= a \cdot a \cdot x \cdot x - 3 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \\ &= a \cdot x \cdot x(a - 3x) \\ &= ax^2(a-3x) \end{aligned}$$

2.5.2. Ausmultiplizieren

➔ **aus einem Produkt wird eine Summe**

$a(b+c) = ab + ac$ s. 2.5.1

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ „Jeder gibt jedem die Hand"

<u>Beispiele</u>:

$3a(2-b) = 3a \cdot 2 + 3a(-b) = 3a - 3ab$

$(3-b)(2+a) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot a - b \cdot 2 - b \cdot a = 6 + 3a - 2b - ab$! Minuszeichen !

2.5.3. Binomische Formeln

➔ Sonderfälle des Ausmultiplizierens und Ausklammerns

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

s. auch: Erweitern und Kürzen von Brüchen / Bruchtermen

Beispiele:

$(3+x)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot x + x^2 = 9 + 6x + x^2$

$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$16x^2 - 4 = (4x)^2 - 2^2 = (4x-2)(4x+2)$

2.6. „Vorfahrtsregeln“

Punkt- vor Strichrechnung. Klammern zuerst

➔ Beachten Sie den Unterschied!

$x - 2(x+2) = x - 2x - 4$

$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$

2.7. Brüche

2.7.1. Minuszeichen

$\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$ „Minus mal Minus ergibt Plus“

$\left(\frac{3}{-5}\right) = -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$ Ein Minuszeichen wird dem Nenner zugeordnet oder steht vor dem Bruchstrich

2.7.2. Erweitern

$\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{6}{10}$

$\frac{3}{2} = \frac{3\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)} = \frac{3x+3}{2x+2}; x \neq -1$

Zähler und Nenner mit derselben Zahl bzw. mit demselben Term (nicht Null!) multiplizieren

2.7.3. Kürzen

$\frac{27}{72} = \frac{3\cdot 9}{8\cdot 9} = \frac{3}{8}$

Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl bzw. denselben Term (nicht Null!) dividieren

$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}; (x \neq 2)$

2.7.4. Addition und Subtraktion

Gleichnamige Brüche:

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2+1}{7}=\frac{3}{7}$$

Zähler werden addiert/subtrahiert,
Nenner wird beibehalten

Ungleichnamige Brüche:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{10}{15}-\frac{3}{15}=\frac{10-3}{15}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{3x}{6}-\frac{4x}{6}=\frac{-x}{6}$$

Brüche zuerst gleichnamig machen
(durch Erweitern)

2.7.5. Multiplikation

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{28}$$

„Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner“

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{x}{6}$$

2.7.6. Division / Doppelbrüche

$$3:\frac{1}{2}=3\bullet\frac{2}{1}=6$$

Division durch einen Bruch = Multiplikation mit dessen Kehrwert

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\bullet\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Hauptbruchstrich durch „ **:** “ ersetzen ...

2.8. Potenzen

2.8.1. Potenzen mit natürlichen Hochzahlen

$a^n = a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ n gleiche Faktoren ($n \in$)

Beispiel: $4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$ 3 gleiche Faktoren

2.8.1.1. Addition und Subtraktion von Potenzen

- **gleiche Potenzen** (Basis und Hochzahl gleich) lassen sich zusammenfassen

  $3x^2 - 5x^2 = -2x^2$

  Rechenregel: Potenz vor Punkt vor Strich

  $3\cdot 4^2 - 5\cdot 4^2 = 3\cdot 16 - 5\cdot 16 = 48 - 80 = -32$

- bei verschiedenen Potenzen ist keine Zusammenfassung möglich

  $3x^2 - 5x^3 =$

2.8.1.2. Multiplikation und Division von Potenzen ...

...mit gleicher Basis	**Beispiele**	„Begründung“ mittels o.g. Regeln
$(-a)^n = a^n$ für n gerade $(-a)^n = -a^n$ für n ungerade	$(-2)^4 = 2^4 = 16$ $(-2)^3 = -2^3 = -8$	$(-2)(-2)(-2)(-2) = 16$ $(-2)(-2)(-2) = -8$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	$2\cdot2\cdot2\bullet2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^7$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad a \neq 0$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$	$\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2} = 2^2$
$a^0 = 1$ $\quad a \neq 0$	$3^0 = 1$	$\frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0$
$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6$	$(2\cdot2\cdot2)^2$ $= 2\cdot2\cdot2\bullet2\cdot2\cdot2\cdot = 2^6$

Unterscheiden Sie: $-4^2 = -16$ und $(-4)^2 = 16$

➔ **„Potenz vor Punkt vor Strich“**

... mit gleichen Exponenten	**Beispiele**	„Begründung“ mittels o.g. Regeln
$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$2^3 \cdot 3^3 = (2\cdot3)^3$ $= 6^3 = 216$	$2\cdot2\cdot2\bullet3\cdot3\cdot3$ $= 2\cdot3\bullet2\cdot3\bullet2\cdot3$ $= (2\cdot3)^3$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$\frac{2^2}{3^2} = \frac{2\cdot2}{3\cdot3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

2.8.1.3. Potenzen mit negativen Hochzahlen

Definition		„Begründung“
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	Kehrwert von a
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$3^{-2} = (3^2)^{-1} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$

➔ **Anmerkung:** Die genannten Regeln gelten auch für **negative** Hochzahlen:

Beispiel: $x^{-2} \cdot x^5 = x^{-2+5} = x^3$, denn $x^{-2} \cdot x^5 = \frac{1}{x^2} \cdot x^5 = \frac{x^5}{x^2} = x^3$

2.8.1.4. Zehnerpotenzen

➔ Wissenschaftliche Darstellung von sehr großen bzw. sehr kleinen Zahlen

Beispiele	**Zehnerpotenzdarstellung**	**Taschenrechnerdarstellung**
234000000000	$2{,}34 \cdot 10^{11}$	2.34 E11
56780000	$5{,}678 \cdot 10^{7}$	5.678E7
0,00000354	$3{,}54 \cdot 10^{-6}$	3.54E-6
0,000987	$9{,}87 \cdot 10^{-4}$	9.87E-4

2.9. Wurzeln

2.9.1. Quadratwurzeln

Definition: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \,;\, a \geq 0$

2.9.1.1. Addition und Subtraktion von Quadratwurzeln

Nur **gleiche** Quadratwurzeln lassen sich zusammenfassen:

$$2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Beachten Sie den Unterschied: $\sqrt{5} + \sqrt{2} \neq \sqrt{5+2}$ → nachrechnen...

2.9.1.2. Potenzschreibweise von Quadratwurzeln

Definition: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} \quad ; \quad a \geq 0$

2.9.1.3. Multiplikation und Division von Quadratwurzeln

	Beispiele	„Begründung“ mittels Potenzregeln (s.o.)
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad a,b\ge 0$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$	$3^{0,5}\cdot 5^{0,5}=(3\cdot 5)^{0,5}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad a\ge 0; b>0$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{3^{0,5}}{5^{0,5}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{0,5}$

2.9.1.4. Teilweise Wurzel ziehen

→ Anwendung der o.g. Rechenregeln

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=a\sqrt{a}$$

2.9.2. Höhere Wurzeln (Potenzen mit rationalen Hochzahlen)

	Definition	Potenzschreibweise
3. Wurzel	$\sqrt[3]{a^3}=(\sqrt[3]{a})^3=a \quad ; \quad a\ge 0$	$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$
4. Wurzel	$\sqrt[4]{a^4}=(\sqrt[4]{a})^4=a \quad ; \quad a\ge 0$	$\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}$
n-te Wurzel $\quad n\in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a \quad ; \quad a\ge 0$	$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$
$n\in \mathbb{N}^*$; $m\in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m \quad ; \quad a\ge 0$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

➔ die Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit rationalen Hochzahlen

Beispiele:

$$\left(\sqrt{x}\right)^5=(x^{0,5})^5=x^{0,5\cdot 5}=x^{2,5}=x^{2+0,5}=x^2\cdot x^{0,5}=x^2\sqrt{x}$$

$$a^{-\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}=a^{-\frac{5}{6}}$$ → Bruchrechenregeln für die Berechnung der Hochzahl!

3. Gleichungen und Formeln

Zum Lösen von Gleichungen werden **Äquivalenzumformungen** durchgeführt, die die Lösungsmenge der Gleichungen nicht verändern.

Äquivalenzumformungen sind:

- auf beiden Seiten der Gleichung wird dieselbe Zahl / derselbe Term addiert oder subtrahiert
- beide Seiten der Gleichung werden mit derselben Zahl / demselben Term (nicht Null) multipliziert oder durch dieselbe Zahl / denselben Term (nicht Null) dividiert.

3.1. Lineare Gleichungen

→ Die Lösungsvariable tritt nur in der 1. Potenz auf

→ Eine lineare Gleichung kann **keine**, **genau eine** oder **unendlich viele** Lösungen haben

→ **Probe**: Überprüfen der Lösung durch Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung. Hierbei muss eine wahre Aussage entstehen

Beispiele:

Beispiel 1	Beschreibung des Lösungswegs
$2(1+x)+1=1+2x$	Klammer auflösen
$2+2x+1=1+2x$	soweit wie möglich zusammenfassen
$3+2x=1+2x \quad \vert -2x$	beidseitig wird 2x subtrahiert
$3 = 1$ $L = \{\ \}$	x fällt weg, es entsteht eine **falsche** Aussage ➔ die Gleichung besitzt **keine** Lösung

Beispiel 2	Beschreibung des Lösungswegs
$5x-(8+9x)=12$	Klammer auflösen
$5x-8-9x=12$	so weit wie möglich zusammenfassen
$-8-4x=12 \quad \vert +8$	beidseitig wird 8 addiert
$-4x=20 \quad \vert : (-4)$	beidseitig wird durch (-4) dividiert
$x=-5$ $L = \{ -5 \}$	Die Gleichung besitzt **genau eine** Lösung

Beispiel 3	Beschreibung des Lösungswegs
$20x-3(5x+7)=-5(4-x)-1$	Klammern auflösen
$20x-15x-21=-20+5x-1$	zusammenfassen
$5x-21=-21+5x \quad \vert +21$	beidseitig wird 21 addiert
$5x=5x \quad \vert -5x$	beidseitig wird 5 subtrahiert
$0 = 0$ $L = IR$	x fällt weg, es entsteht eine **wahre** Aussage → die Gleichung besitzt **unendlich viele** Lösungen

3.2. Lineare Gleichungssysteme (2 Variablen / 2 Gleichungen)

→ es gibt **drei** verschiedene Lösungsansätze (s.u.).

→ **Probe**: Einsetzen der Lösung in **beide** Ausgangsgleichungen muss wahre Aussagen ergeben.

3.2.1. Gleichsetzungsverfahren

	Beschreibung des Lösungswegs
$2x + y = 3$ $x + y = 1$	Beide Gleichungen auflösen nach y
$y = -2x + 3$ $y = -x + 1$	Gleichsetzen → dadurch erhält man eine Gleichung mit **nur noch einer Variablen** Aus dieser kann x berechnet werden.
$-2x + 3 = -x + 1 \qquad \mid +x \quad \mid -3$	Beidseitig wird x addiert und 3 subtrahiert
$-x = -2 \qquad \mid \cdot(-1)$	Beidseitig wird mit -1 multipliziert
$x = 2$	Berechnung von y → In **einer** der beiden Ausgangsgleichungen wird x durch 2 ersetzt (Man nimmt die einfachere, hier also die untere Gleichung)
$2 + y = 1 \qquad \mid -2$	Beidseitig wird 2 subtrahiert
$y = -1$ L = {(2 ; -1)}	Die Lösung des LGS besteht aus $x = 2$ **und** $y = -1$.
$2 \cdot 2 + (-1) = 3$ $2 + (-1) = 1$	**Probe:** in **beiden Ausgangsgleichungen** wird x durch 2 und y durch -1 ersetzt.
$3 = 3$ $1 = 1$	Es entstehen jeweils **wahre** Aussagen, d.h. Lösung ist richtig

3.2.2. Additionsverfahren

	Beschreibung des Lösungswegs
$2x + y = 3$ $x + y = 1 \quad \mid \cdot (-1)$	Die untere Gleichung wird mit -1 multipliziert
$2x + y = 3$ $-x - y = -1$ +	Die obere Gleichung bleibt stehen. Zur unteren Gleichung wird die obere addiert Ziel: die obere Gleichung erhält noch beide Variablen, die untere **nur noch eine Variable.** Somit kann aus der unteren Gleichung die Lösung für die erste Variable (hier: x) ermittelt werden
$2x + y = 3$ $x = 2$	In der oberen Gleichung wird nun x durch 2 ersetzt (da $x = 2$)
$2 \cdot 2 + y = 3 \quad \mid -4$ $x = 2$	Nun kann aus der ersten Gleichung die Lösung für y berechnet werden
$y = -1$ $x = 2$ $L = \{(2\,;\,-1)\}$	Das LGS besitzt genau eine Lösung **Probe: s.o.**

3.2.3. Einsetzungsverfahren

	Beschreibung des Lösungswegs
$2x+y=3$ $x+y=1$	Eine Gleichung wird nach x <u>oder</u> y aufgelöst. z.B. die untere Gleichung y
$2x+y=3$ $y=1-x$	Ersetze in der oberen Gleichung y durch 1-x
$2x+(1-x)=3$ $y=1-x$	Die obere Gleichung enthält nun **nur noch eine Variable** (hier: x). Hieraus kann x berechnet werden.
$2x+1-x=3$ $y=1-x$	Zusammenfassen der ersten Gleichung
$x+1=3 \quad \mid -1$ $y=1-x$	in der oberen Gleichung beidseitig 1 subtrahieren
$x=2$ $y=1-x$	Nun in der unteren Gleichung x durch 2 ersetzen um y zu berechnen
$x=2$ $y=1-2$	Berechnen von y
$x=2$ $y=-1$ L = {(2 ; -1)}	**Probe: s.o.**

Anmerkung:

Auch bei einem LGS kann die Lösungsmenge leer sein, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen enthalten.

3.3. Quadratische Gleichungen

→ Die Lösungsvariable tritt in der 2. Potenz und ggf. in der 1. Potenz auf

→ Eine quadratische Gleichung kann keine, genau eine oder zwei Lösungen haben

→ Probe: Überprüfen der Lösung durch Einsetzen der Lösung(en) in die Ausgangsgleichung. Hierbei muss eine wahre Aussage entstehen

3.3.1. Reinquadratische Gleichungen der Form ax² + c = 0

→ Die Lösungsvariable tritt **nur** in der **2. Potenz** auf

Umformen der Gleichung : $x^2 = -\frac{c}{a}$

Die **Anzahl** der Lösungen hängt davon ab, ob $-\frac{c}{a}$ **positiv**, **negativ** oder **Null** ist.

Gleichung	umgeformt	Entscheidung	Lösungen
$ax^2 + c = 0$	$x^2 = -\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$: > 0 (positiv) $= 0$ < 0 (negativ)	zwei Lösungen eine Lösung keine Lösung
$3x^2 + 2 = 0$	$x^2 = -\frac{2}{3}$	< 0	keine
$-3x^2 = 0$	$x^2 = 0$	$= 0$	eine doppelte Lösung $x_{1,2} = 0$
$2x^2 - 8 = 0$	$x^2 = -\frac{-8}{2} = 4$	> 0	zwei Lösungen $x_1 = -\sqrt{4} = -2$ $x_2 = \sqrt{4} = 2$

3.3.2. Gemischtquadratische Gleichungen

→ Die Lösungsvariable tritt in der **2. Potenz** und in der **1. Potenz** auf.

→ Zwei mögliche Ausgangsgleichungen

3.3.2.1. Gemischtquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

→ **Ausklammern** von x und **SvNP** anwenden

Satz vom Nullprodukt (SvNP): Ein Produkt ist genau dann Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist.

$x_1 = 0$ ist hierbei immer eine Lösung.

Vorgehensweise	allgemeine Form	Beispiel
	$ax^2 + bx = 0$	$3x^2 - 2x = 0$
Ausklammern von x	$x(ax + b) = 0$	$x(3x - 2) = 0$
Satz vom Nullprodukt	$x = 0 \vee (ax + b) = 0$ *)	$x = 0 \vee (3x - 2) = 0$
1. Lösung	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
Berechnung der 2. Lösung aus $ax + b = 0$	$ax + b = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$3x - 2 = 0$ $x_2 = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$
Lösungsmenge	$L = \{0; -\frac{b}{a}\}$	$L = \{0; \frac{2}{3}\}$

*) $\vee$ ... "oder"

3.3.2.2. Gemischtquadratische Gleichungen der Form ax² + bx + c = 0

→ Allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen

„Mitternachtsformel" $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *)

Die **Anzahl** der Lösungen hängt davon ab, ob die **Diskriminante D** ($D = b^2 - 4ac$) **positiv**, **negativ** oder **Null** ist.

Gleichung	„Mitternachtsformel"	Entscheidung	Lösungen
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$D \begin{cases} > 0 \text{ (positiv)} \\ = 0 \\ < 0 \text{ (negativ)} \end{cases}$	zwei Lösungen eine Lösung keine Lösung
$3x^2 + 2x + 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$	$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$ $= -8 < 0$	keine Lösung
$2x^2 + 3x + 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$	$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$ $= 1 > 0$	zwei Lösungen $x_1 = \dfrac{-3 - 1}{4} = -1$ $x_2 = \dfrac{-3 + 1}{4} = -\dfrac{1}{2}$
$-9x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-9)(-\frac{1}{4})}}{2 \cdot (-9)}$	$D = 3^2 - 4(-9)(-\frac{1}{4})$ $= 0$	eine doppelte Lösung $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{0}}{-18} = \dfrac{1}{6}$

*) Für a = 1 stimmt die „Mitternachtsformel" mit der "**pq -Formel**" überein

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

3.4. Formeln umstellen

→ geschieht ebenso wie das Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

→ „Lösungsvariable“ ist dasjenige Formelzeichen, nach welchem die Formel umgestellt werden muss.

→ **Ein paar hilfreiche Tipps:**

1. Brüche eliminieren → Formel beidseitig mit dem Hauptnenner multiplizieren
2. Beim **Berechnen** von Termen gilt die Regel:

   „Potenzen vor Punkt vor Strich. Klammern zuerst“

   Beim **Umstellen** von Formeln / Lösen von Gleichungen dreht sich dies um
3. Nicht zu viele Schritte gleichzeitig durchführen

Beispiele:

1. $R = \frac{U}{I}$ → **Umstellen nach I**

$$R = \frac{U}{I} \qquad | \cdot I$$
$$R \cdot I = U \qquad | : R$$
$$I = \frac{U}{R}$$

2. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ → **Umstellen nach r**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad | \cdot 3$$
$$3V = \pi r^2 h \qquad | : h$$
$$\frac{3V}{h} = \pi r^2 \qquad | : \pi$$
$$\frac{3V}{\pi h} = r^2 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = r$$

3. $A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$ → **Umstellen nach d**

$$A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \qquad | \cdot 4$$
$$4A = \pi (D^2 - d^2) \qquad | : \pi$$
$$\frac{4A}{\pi} = D^2 - d^2 \qquad | - D^2$$
$$\frac{4A}{\pi} - D^2 = -d^2 \qquad | \cdot (-1)$$
$$D^2 - \frac{4A}{\pi} = d^2 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{D^2 - \frac{4A}{\pi}} = d$$