

Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

Inhalt

1. Zahlenbereiche / Zahlenmengen

2. Terme

2.1. Grundbegriffe

2.2. Summen und Differenzen

2.3. Produkte

2.4. Auflösen von Klammern

2.5. Ausklammern und Ausmultiplizieren

2.5.1. Ausklammern

2.5.2. Ausmultiplizieren

2.5.3. Binomische Formeln

2.6. „Vorfahrtsregeln“

2.7. Brüche

2.7.1. Minuszeichen

2.7.2. Erweitern

2.7.3. Kürzen

2.7.4. Addition und Subtraktion

2.7.5. Multiplikation

2.7.6. Division / Doppelbrüche

2.8. Potenzen

2.8.1. Potenzen mit natürlichen Hochzahlen

2.8.1.1. Addition und Subtraktion von Potenzen

2.8.1.2. Multiplikation und Division von Potenzen

2.8.1.3. Potenzen mit negativen Hochzahlen

2.8.1.4. Zehnerpotenzen

2.9. Wurzeln

2.9.1. Quadratwurzeln

2.9.1.1. Addition und Subtraktion von Quadratwurzeln

2.9.1.2. Multiplikation und Division von Quadratwurzeln

2.9.1.3. Teilweise Wurzel ziehen

2.9.1.4. Potenzschreibweise von Quadratwurzeln

2.9.2. Höhere Wurzeln (Potenzen mit rationalen Hochzahlen)

3. Gleichungen und Formeln

3.1. Lineare Gleichungen

3.2. Lineare Gleichungssysteme (2 Variablen / 2 Gleichungen)

3.2.1. Gleichsetzungsverfahren

3.2.2. Additionsverfahren

3.2.3. Einsetzungsverfahren

3.3. Quadratische Gleichungen

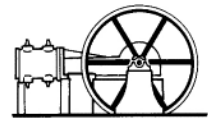
3.3.1. Reinquadratische Gleichungen

3.3.2. Gemischtquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$

3.3.2.1. Gemischtquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

3.3.2.2. Gemischtquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$

3.4. Formeln umstellen



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

1. Zahlenbereiche / Zahlenmengen

	Bezeichnung	Beschreibung / Beispiele
natürliche Zahlen	N	0,1,2,3,4,5,6,7,8,....
ganze Zahlen	Z	..., -2,-1, 0, 1, 2, 3,
rationale Zahlen	Q	Bruchzahlen, z.B. $\frac{1}{2}$; $-\frac{6}{7}$; -0,3; 2; 0
irrationale Zahlen		Zahlen, die sich nicht als Bruch schreiben lassen, z.B. π , e, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, ...
reelle Zahlen	R	rationale Zahlen und irrationale Zahlen

2. Terme

Unter einem **Term** versteht man einen **mathematischen Ausdruck** der aus Zahlen und / oder Variablen besteht, welche z.T. mit Rechenzeichen verbunden sind.

Beispiele: 3 , x, 6a , 3+4 , x² , (2x+5) – 1

2.1. Grundbegriffe

Summe	a + b	a und b heißen Summanden
Differenz	a – b	
Produkt	a · b	a und b heißen Faktoren
Quotient	a : b ; b ≠ 0	a heißt Dividend , b heißt Divisor (b darf nicht Null sein)
Bruch	$\frac{a}{b}$; b ≠ 0	a heißt Zähler , b heißt Nenner (b darf nicht Null sein)
Kehrwert von a	$\frac{1}{a}$; a ≠ 0	a darf nicht Null sein
Potenz	a ^b	a heißt Basis (Grundzahl) , b heißt Exponent (Hochzahl)

Zu unterscheiden: a + a + a + a = 4a

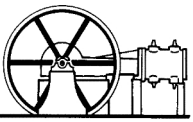
$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

2.2. Summen und Differenzen

Summanden dürfen vertauscht werden

Gleichartige Glieder werden zusammengefasst

$$\begin{aligned} &2a - 5 + 3b + a - 5b - a + 3 \\ &= 2a + a - a - 5 + 3 + 3b - 5b \\ &= 2a - 2 - 2b \end{aligned}$$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

2.3. Produkte

Faktoren dürfen vertauscht werden.

$$2a \cdot 5b = 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 10ab$$

Ungerade Anzahl von Minuszeichen
→ Produkt ist negativ

$$2a \cdot (-3b) \cdot (-2) = 2 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot a \cdot b = 12ab$$

$$2a \cdot (-3b) \cdot 2 = 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a \cdot b = -12ab$$

Malpunkte werden üblicherweise **weggelassen**, wenn sie zwischen

- einer Zahl und einer Variablen, z.B. $2a = 2 \cdot a$
- einer Zahl und einer Klammer, z.B. $2(a + 1) = 2 \cdot (a + 1)$
- einer Variablen und einer Klammer, z.B. $x(a + 1) = x \cdot (a + 1)$
- zwei Variablen $ax = a \cdot x$

stehen.

2.4. Auflösen von Klammern

$$3a + (2b - 3) = 3a + 2b - 3 \quad \text{„Plus“ vor der Klammer: Klammer einfach weglassen}$$

$$3a - (2b - 3) = 3a - 2b + 3 \quad \text{„Minus“ vor der Klammer: In der Klammer wird aus Plus Minus und umgekehrt}$$

$$2(2b - 3) = 2 \cdot 2b + 2 \cdot (-3) = 4b - 6$$

$$-3(2b - 3) = -3 \cdot 2b - 3 \cdot (-3) = -6b + 9$$

Jedes Glied der Summe wird mit dem Faktor vor der Klammer multipliziert
Minuszeichen beachten!

$$\begin{aligned} 2a - [3b + 2(a - 2b)] &= 2a - [3b + 2a - 4b] \\ &= 2a - [-b + 2a] \\ &= 2a + b - 2a = b \end{aligned}$$

Mehrfachklammern: innere Klammern zuerst auflösen

2.5. Ausklammern und Ausmultiplizieren

2.5.1. Ausklammern

→ aus einer Summe wird ein Produkt

$$\begin{aligned} 4x + 2x^2 &= 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot x \cdot x \\ &= 2x(2 + x) \end{aligned}$$

1. Alle Summanden werden in Faktoren zerlegt
2. Ausgeklammert wird der größte gemeinsame Faktor (hier: $2x$ bzw. ax^2)

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 3ax^3 &= a \cdot a \cdot x \cdot x - 3 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \\ &= a \cdot x \cdot x(a - 3x) \\ &= ax^2(a - 3x) \end{aligned}$$

2.5.2. Ausmultiplizieren

→ aus einem Produkt wird eine Summe

$$a(b + c) = ab + ac$$

s. 2.5.1

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

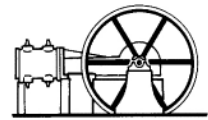
„Jeder gibt jedem die Hand“

Beispiele:

$$3a(2 - b) = 3a \cdot 2 + 3a(-b) = 3a - 3ab$$

$$(3 - b)(2 + a) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot a - b \cdot 2 - b \cdot a = 6 + 3a - 2b - ab$$

! Minuszeichen !



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

2.5.3. Binomische Formeln

→ Sonderfälle des Ausmultiplizierens und Ausklammerns

$$\left. \begin{array}{l} 1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ 3. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{array} \right\} \text{ s. auch: Erweitern und Kürzen von} \\ \text{Brüchen / Bruchtermen}$$

Beispiele:

$$(3+x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = 9 + 6x + x^2$$

$$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$16x^2 - 4 = (4x)^2 - 2^2 = (4x-2)(4x+2)$$

2.6. „Vorfahrtsregeln“

Punkt- vor Strichrechnung. Klammern zuerst

→ **Beachten Sie den Unterschied!**

$$x - 2(x+2) = x - 2x - 4$$

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

2.7. Brüche

2.7.1. Minuszeichen

$$\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

„Minus mal Minus ergibt Plus“

$$\left(\frac{3}{-5} \right) = -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$$

Ein Minuszeichen wird dem Nenner zugeordnet
oder steht vor dem Bruchstrich

2.7.2. Erweitern

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot (x+1)}{2 \cdot (x+1)} = \frac{3x+3}{2x+2}; x \neq -1$$

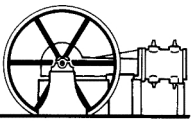
Zähler und Nenner mit derselben Zahl bzw.
mit demselben Term (nicht Null!) multiplizieren

2.7.3. Kürzen

$$\frac{27}{72} = \frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{3}{8}$$

Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl bzw.
denselben Term (nicht Null!) dividieren

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}; (x \neq 2)$$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

2.7.4. Addition und Subtraktion

Gleichnamige Brüche:

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2+1}{7} = \frac{3}{7}$$

Zähler werden addiert/subtrahiert,
Nenner wird beibehalten

Ungleichnamige Brüche:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$$

Brüche zuerst gleichnamig machen
(durch Erweitern)

$$\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{6} - \frac{4x}{6} = \frac{-x}{6}$$

2.7.5. Multiplikation

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{28}$$

„Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner“

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{6}$$

2.7.6. Division / Doppelbrüche

$$3 : \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{1} = 6$$

Division durch einen Bruch = Multiplikation mit dessen
Kehrwert

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Hauptbruchstrich durch „ : “ ersetzen ...

2.8. Potenzen

2.8.1. Potenzen mit natürlichen Hochzahlen

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad n \text{ gleiche Faktoren } (n \in \mathbb{N})$$

Beispiel: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ 3 gleiche Faktoren

2.8.1.1. Addition und Subtraktion von Potenzen

- **gleiche Potenzen** (Basis und Hochzahl gleich) lassen sich zusammenfassen

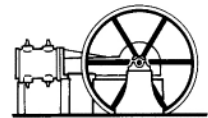
$$3x^2 - 5x^2 = -2x^2$$

Rechenregel: Potenz vor Punkt vor Strich

$$3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 16 = 48 - 80 = -32$$

- bei verschiedenen Potenzen ist keine Zusammenfassung möglich

$$3x^2 - 5x^3 =$$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

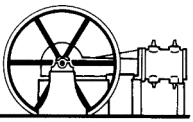
2.8.1.2. Multiplikation und Division von Potenzen ...

...mit gleicher Basis	Beispiele	„Begründung“ mittels o.g. Regeln
$(-a)^n = a^n$ für n gerade $(-a)^n = -a^n$ für n ungerade	$(-2)^4 = 2^4 = 16$ $(-2)^3 = -2^3 = -8$	$(-2)(-2)(-2)(-2) = 16$ $(-2)(-2)(-2) = -8$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $a \neq 0$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2$
$a^0 = 1$ $a \neq 0$	$3^0 = 1$	$\frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$	$(2 \cdot 2 \cdot 2)^2$ $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

Unterscheiden Sie: $-4^2 = -16$ und $(-4)^2 = 16$

→ „Potenz vor Punkt vor Strich“

... mit gleichen Exponenten	Beispiele	„Begründung“ mittels o.g. Regeln
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$ $= 6^3 = 216$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$ $= (2 \cdot 3)^3$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$\frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

2.8.1.3. Potenzen mit negativen Hochzahlen

Definition		„Begründung“
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	Kehrwert von a
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$3^{-2} = (3^2)^{-1} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$

→ **Anmerkung:** Die genannten Regeln gelten auch für **negative** Hochzahlen:

Beispiel: $x^{-2} \cdot x^5 = x^{-2+5} = x^3$, denn $x^{-2} \cdot x^5 = \frac{1}{x^2} \cdot x^5 = \frac{x^5}{x^2} = x^3$

2.8.1.4. Zehnerpotenzen

→ Wissenschaftliche Darstellung von sehr großen bzw. sehr kleinen Zahlen

Beispiele	Zehnerpotenzdarstellung	Taschenrechnerdarstellung
234000000000	$2,34 \cdot 10^{11}$	2.34 E11
56780000	$5,678 \cdot 10^7$	5.678E7
0,00000354	$3,54 \cdot 10^{-6}$	3.54E-6
0,000987	$9,87 \cdot 10^{-4}$	9.87E-4

2.9. Wurzeln

2.9.1. Quadratwurzeln

Definition: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a ; a \geq 0$

2.9.1.1. Addition und Subtraktion von Quadratwurzeln

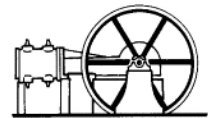
Nur **gleiche** Quadratwurzeln lassen sich zusammenfassen:

$$2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Beachten Sie den Unterschied: $\sqrt{5} + \sqrt{2} \neq \sqrt{5+2} \rightarrow$ nachrechnen...

2.9.1.2. Potenzschreibweise von Quadratwurzeln

Definition: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} ; a \geq 0$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

2.9.1.3. Multiplikation und Division von Quadratwurzeln

	Beispiele	„Begründung“ mittels Potenzregeln (s.o.)
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad a, b \geq 0$	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$	$3^{0,5} \cdot 5^{0,5} = (3 \cdot 5)^{0,5}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad a \geq 0; b > 0$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{3^{0,5}}{5^{0,5}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{0,5}$

2.9.1.4. Teilweise Wurzel ziehen

→ Anwendung der o.g. Rechenregeln

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$$

2.9.2. Höhere Wurzeln (Potenzen mit rationalen Hochzahlen)

	Definition	Potenzschreibweise
3. Wurzel	$\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a \quad ; \quad a \geq 0$	$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$
4. Wurzel	$\sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{a})^4 = a \quad ; \quad a \geq 0$	$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$
n-te Wurzel $n \in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a \quad ; \quad a \geq 0$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$n \in \mathbb{N}^* ; m \in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad ; \quad a \geq 0$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

→ die Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit rationalen Hochzahlen

Beispiele:

$$(\sqrt{x})^5 = (x^{0,5})^5 = x^{0,5 \cdot 5} = x^{2,5} = x^{2+0,5} = x^2 \cdot x^{0,5} = x^2 \sqrt{x}$$

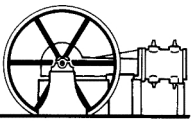
$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{6}} \quad \rightarrow \text{Bruchrechenregeln für die Berechnung der Hochzahl!}$$

3. Gleichungen und Formeln

Zum Lösen von Gleichungen werden **Äquivalenzumformungen** durchgeführt, die die Lösungsmenge der Gleichungen nicht verändern.

Äquivalenzumformungen sind:

- auf beiden Seiten der Gleichung wird dieselbe Zahl / derselbe Term addiert oder subtrahiert
- beide Seiten der Gleichung werden mit derselben Zahl / demselben Term (nicht Null) multipliziert oder durch dieselbe Zahl / denselben Term (nicht Null) dividiert.



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.1. Lineare Gleichungen

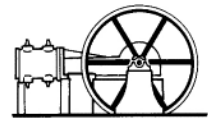
- Die Lösungsvariable tritt nur in der 1. Potenz auf
- Eine lineare Gleichung kann **keine**, **genau eine** oder **unendlich viele** Lösungen haben
- **Probe**: Überprüfen der Lösung durch Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung. Hierbei muss eine wahre Aussage entstehen

Beispiele:

Beispiel 1	Beschreibung des Lösungswegs
$2(1+x) + 1 = 1 + 2x$	Klammer auflösen
$2 + 2x + 1 = 1 + 2x$	soweit wie möglich zusammenfassen
$3 + 2x = 1 + 2x \quad -2x$	beidseitig wird $2x$ subtrahiert
$3 = 1$	x fällt weg, es entsteht eine falsche Aussage
$L = \{ \}$	→ die Gleichung besitzt keine Lösung

Beispiel 2	Beschreibung des Lösungswegs
$5x - (8 + 9x) = 12$	Klammer auflösen
$5x - 8 - 9x = 12$	so weit wie möglich zusammenfassen
$-8 - 4x = 12 \quad +8$	beidseitig wird 8 addiert
$-4x = 20 \quad : (-4)$	beidseitig wird durch (-4) dividiert
$x = -5$	Die Gleichung besitzt genau eine Lösung
$L = \{ -5 \}$	

Beispiel 3	Beschreibung des Lösungswegs
$20x - 3(5x + 7) = -5(4 - x) - 1$	Klammern auflösen
$20x - 15x - 21 = -20 + 5x - 1$	zusammenfassen
$5x - 21 = -21 + 5x \quad +21$	beidseitig wird 21 addiert
$5x = 5x \quad -5x$	beidseitig wird 5 subtrahiert
$0 = 0$	x fällt weg, es entsteht eine wahre Aussage
$L = \mathbb{R}$	→ die Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

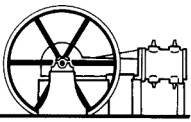
3.2. Lineare Gleichungssysteme (2 Variablen / 2 Gleichungen)

→ es gibt **drei** verschiedene Lösungsansätze (s.u.).

→ **Probe**: Einsetzen der Lösung in **beide** Ausgangsgleichungen muss wahre Aussagen ergeben.

3.2.1. Gleichsetzungsverfahren

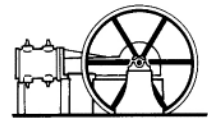
	Beschreibung des Lösungswegs
$2x + y = 3$ $x + y = 1$	Beide Gleichungen auflösen nach y
$y = -2x + 3$ $y = -x + 1$	Gleichsetzen → dadurch erhält man eine Gleichung mit nur noch einer Variablen Aus dieser kann x berechnet werden.
$-2x + 3 = -x + 1$ +x -3	Beidseitig wird x addiert und 3 subtrahiert
$-x = -2$ · (-1)	Beidseitig wird mit -1 multipliziert
$x = 2$	Berechnung von y → In einer der beiden Ausgangsgleichungen wird x durch 2 ersetzt (Man nimmt die einfachere, hier also die untere Gleichung)
$2 + y = 1$ -2	Beidseitig wird 2 subtrahiert
$y = -1$ $L = \{(2 ; -1)\}$	Die Lösung des LGS besteht aus $x = 2$ und $y = -1$.
$2 \cdot 2 + (-1) = 3$ $2 + (-1) = 1$	Probe : in beiden Ausgangsgleichungen wird x durch 2 und y durch -1 ersetzt.
$3 = 3$ $1 = 1$	Es entstehen jeweils wahre Aussagen, d.h. Lösung ist richtig



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.2.2. Additionsverfahren

	Beschreibung des Lösungswegs
$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \quad \cdot (-1) \end{array}$	Die untere Gleichung wird mit -1 multipliziert
$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ -x - y = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ -x - y = -1 \end{array}} \right\} + \\ \leftarrow \end{array}$	Die obere Gleichung bleibt stehen. Zur unteren Gleichung wird die obere addiert Ziel: die obere Gleichung erhält noch beide Variablen, die untere nur noch eine Variable . Somit kann aus der unteren Gleichung die Lösung für die erste Variable (hier: x) ermittelt werden
$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x = 2 \end{array}$	In der oberen Gleichung wird nun x durch 2 ersetzt (da $x = 2$)
$\begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 3 \quad - 4 \\ x = 2 \end{array}$	Nun kann aus der ersten Gleichung die Lösung für y berechnet werden
$\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 2 \\ \\ L = \{(2; -1)\} \end{array}$	Das LGS besitzt genau eine Lösung Probe: s.o.



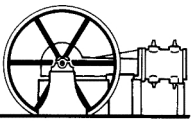
Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.2.3. Einsetzungsverfahren

	Beschreibung des Lösungswegs
$2x + y = 3$ $x + y = 1$	Eine Gleichung wird nach x <u>oder</u> y aufgelöst. z.B. die untere Gleichung y
$2x + y = 3$ $y = 1 - x$	Ersetze in der oberen Gleichung y durch 1-x
$2x + (1 - x) = 3$ $y = 1 - x$	Die obere Gleichung enthält nun nur noch eine Variable (hier: x). Hieraus kann x berechnet werden.
$2x + 1 - x = 3$ $y = 1 - x$	Zusammenfassen der ersten Gleichung
$x + 1 = 3 \quad -1$ $y = 1 - x$	in der oberen Gleichung beidseitig 1 subtrahieren
$x = 2$ $y = 1 - x$	Nun in der unteren Gleichung x durch 2 ersetzen um y zu berechnen
$x = 2$ $y = 1 - 2$	Berechnen von y
$x = 2$ $y = -1$ $L = \{(2 ; -1)\}$	Probe: s.o.

Anmerkung:

Auch bei einem LGS kann die Lösungsmenge leer sein, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen enthalten.



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.3. Quadratische Gleichungen

- Die Lösungsvariable tritt in der 2. Potenz und ggf. in der 1. Potenz auf
- Eine quadratische Gleichung kann keine, genau eine oder zwei Lösungen haben
- Probe: Überprüfen der Lösung durch Einsetzen der Lösung(en) in die Ausgangsgleichung. Hierbei muss eine wahre Aussage entstehen

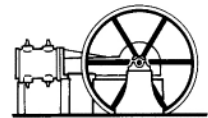
3.3.1. Reinquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$

- Die Lösungsvariable tritt **nur** in der **2. Potenz** auf

Umformen der Gleichung : $x^2 = -\frac{c}{a}$

Die **Anzahl** der Lösungen hängt davon ab, ob $-\frac{c}{a}$ **positiv**, **negativ** oder **Null** ist.

Gleichung	umgeformt	Entscheidung	Lösungen
$ax^2 + c = 0$	$x^2 = -\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a} \begin{cases} > 0 & \text{(positiv)} \\ = 0 \\ < 0 & \text{(negativ)} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{zwei Lösungen} \\ \text{eine Lösung} \\ \text{keine Lösung} \end{cases}$
$3x^2 + 2 = 0$	$x^2 = -\frac{2}{3}$	< 0	keine
$-3x^2 = 0$	$x^2 = 0$	$= 0$	eine doppelte Lösung $x_{1,2} = 0$
$2x^2 - 8 = 0$	$x^2 = -\frac{-8}{2} = 4$	> 0	zwei Lösungen $x_1 = -\sqrt{4} = -2$ $x_2 = \sqrt{4} = 2$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.3.2. Gemischtquadratische Gleichungen

→ Die Lösungsvariable tritt in der **2. Potenz** und in der **1. Potenz** auf.

→ Zwei mögliche Ausgangsgleichungen

3.3.2.1. Gemischtquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

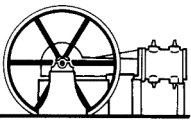
→ **Ausklammern** von x und **SvNP** anwenden

Satz vom Nullprodukt (SvNP): Ein Produkt ist genau dann Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist.

$x_1 = 0$ ist hierbei immer eine Lösung.

Vorgehensweise	allgemeine Form	Beispiel
	$ax^2 + bx = 0$	$3x^2 - 2x = 0$
Ausklammern von x	$x(ax + b) = 0$	$x(3x - 2) = 0$
Satz vom Nullprodukt	$x = 0 \vee (ax + b) = 0$ *)	$x = 0 \vee (3x - 2) = 0$
1. Lösung	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
Berechnung der 2. Lösung aus $ax + b = 0$	$ax + b = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	$3x - 2 = 0$ $x_2 = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$
Lösungsmenge	$L = \{0; -\frac{b}{a}\}$	$L = \{0; \frac{2}{3}\}$

*) \vee ... "oder"



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.3.2.2. Gemischtquadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$

→ Allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen

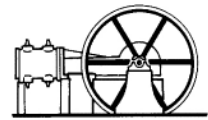
$$\text{„Mitternachtsformel“} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad *)$$

Die **Anzahl** der Lösungen hängt davon ab, ob die **Diskriminante D** ($D = b^2 - 4ac$) **positiv, negativ** oder **Null** ist.

Gleichung	„Mitternachtsformel“	Entscheidung	Lösungen
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$D \begin{cases} > 0 \text{ (positiv)} \\ = 0 \\ < 0 \text{ (negativ)} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{zwei Lösungen} \\ \text{eine Lösung} \\ \text{keine Lösung} \end{cases}$
$3x^2 + 2x + 1 = 0$	$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$	$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$	keine Lösung
$2x^2 + 3x + 1 = 0$	$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$	$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$	zwei Lösungen $x_1 = \frac{-3 - 1}{4} = -1$ $x_2 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}$
$-9x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$	$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-9)(-\frac{1}{4})}}{2 \cdot (-9)}$	$D = 3^2 - 4(-9)(-\frac{1}{4}) = 0$	eine doppelte Lösung $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{0}}{-18} = \frac{1}{6}$

*) Für $a = 1$ stimmt die „Mitternachtsformel“ mit der **„pq-Formel“** überein

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



Mathematische Grundlagen für die Eingangsklassen des TG

3.4. Formeln umstellen

→ geschieht ebenso wie das Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

→ „Lösungsvariable“ ist dasjenige Formelzeichen, nach welchem die Formel umgestellt werden muss.

→ **Ein paar hilfreiche Tipps:**

1. Brüche eliminieren → Formel beidseitig mit dem Hauptnenner multiplizieren
2. Beim **Berechnen** von Termen gilt die Regel:

„Potenzen vor Punkt vor Strich. Klammern zuerst“

Beim **Umstellen** von Formeln / Lösen von Gleichungen dreht sich dies um

3. Nicht zu viele Schritte gleichzeitig durchführen

Beispiele:

$$1. R = \frac{U}{I}$$

→ **Umstellen nach I**

$$R = \frac{U}{I} \quad | \cdot I$$

$$R \cdot I = U \quad | : R$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$2. V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

→ **Umstellen nach r**

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad | \cdot 3$$

$$3V = \pi r^2 h \quad | : h$$

$$\frac{3V}{h} = \pi r^2 \quad | : \pi$$

$$\frac{3V}{\pi h} = r^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = r$$

$$3. A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

→ **Umstellen nach d**

$$A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \quad | \cdot 4$$

$$4A = \pi (D^2 - d^2) \quad | : \pi$$

$$\frac{4A}{\pi} = D^2 - d^2 \quad | - D^2$$

$$\frac{4A}{\pi} - D^2 = -d^2 \quad | \cdot (-1)$$

$$D^2 - \frac{4A}{\pi} = d^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{D^2 - \frac{4A}{\pi}} = d$$